Elke Brendel

Logik-Skript 1

Wahrheit und logisches Schließen

KlostermannRoteReihe

Bibliographische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Daten sind im Internet über *https://dnb.dnb.de* abrufbar.

2., überarbeitete Auflage 2020

Gedruckt auf EOS Werkdruck von Salzer,
alterungsbeständig ∞ ISO 9706 und PEFC-zertifiziert.
Druck und Bindung: Hubert & Co., Göttingen
Printed in Germany
ISSN 1865-7095
ISBN 978-3-465-04527-4

ELKE BRENDEL

Logik-Skript 1

Wahrheit und logisches Schließen

Inhalt

Vorwort

Dieses Buch umfasst den Stoff eines einsemestrigen Einführungskurses in die klassische Logik. Es bietet einen formal präzisen, zugleich aber auch anwendungsorientierten Zugang zu den Grundlagen der Semantik und Syntax der klassischen Junktoren- und Quantorenlogik. Bereits zu meiner eigenen Studienzeit an der Universität Frankfurt am Main habe ich bei Wilhelm K. Essler das logische Schlussfolgern anhand eines *Kalküls des natürlichen Schließens* erlernt. Der Kalkül des natürlichen Schließens erscheint mir auch heute noch als sehr geeignetes formales Instrument zum korrekten Ableiten und zur logischen Rekonstruktion von Argumenten. Das vorliegende Lehr- und Studienbuch orientiert sich daher in seinem syntaktischen Teil an der Darstellung dieses Kalküls, wie er u. a. in Essler et al. ^{5}2001 entwickelt wurde – mit einigen Modifikationen insbesondere bei der Quantorenlogik. Mein Dank gilt somit zuerst meinem akademischen Lehrer Wilhelm Essler, der mein Interesse für formale Methoden in der Philosophie weckte und ohne den dieses Buch wahrscheinlich nicht existieren würde.

Während meiner langjährigen Tätigkeit als Philosophieprofessorin habe ich zahlreiche Einführungskurse in die Logik gegeben. Es war mir stets ein Anliegen, den Studierenden die Logik als eine wichtige Methode des korrekten Denkens und integralen Bestandteil der Philosophie zu vermitteln – und nicht als bloß lästige Pflichtübung oder gar Schikane des Lehrplans. Um die Relevanz der Logik für zentrale Fragen der Sprachphilosophie, der Erkenntnis- und Wissenschaftsphilosophie zu begreifen, sind neben dem Erlernen eines Beweiskalküls auch grundlegende Kenntnisse der formalen Semantik vonnöten. Im vorliegenden Buch findet sich daher auch ein semantischer Zugang zur Logik, der die Begriffe der *Bedeutung* und *Wahrheit* formaler Sprachen in den Vordergrund rückt.

Ein weiteres Anliegen dieses Buches ist es, auf die Möglichkeiten, aber auch Grenzen der klassischen Logik aufmerksam zu machen. Die klassische Logik ist, wie im Buch erläutert wird, u. a. aufgrund ihres Bekenntnisses zur Zweiwertigkeit und zur wahrheitsfunktionalen Interpretation der Junktoren, für bestimmte Anwendungen des menschlichen Denkens und Argumentierens nicht gut gerüstet.

Wie diese Limitierungen in nicht-klassischen Logiken überwunden werden können, ist dann jedoch Gegenstand eines weiteren Lehrbuches.

Mein großer Dank gilt Gregor Damschen und Timo Weiß für das sorgfältige Korrekturlesen des Buchmanuskripts. Sollte das Buch dennoch Fehler enthalten, so habe ich diese selbstverständlich ganz alleine zu verantworten.

Bonn, im Mai 2017 Elke Brendel

I. Was ist Logik?

> Die festeste Beweisführung ist offenbar die rein logische, welche, von der besonderen Beschaffenheit der Dinge absehend, sich allein auf die Gesetze gründet, auf denen alle Erkenntnis beruht. (Frege [5]1998: IX)

Der Begriff der Logik hat schon seit einiger Zeit Hochkonjunktur. So tragen etwa bedeutende Bücher des 20. Jahrhunderts Titel wie „Logik der Forschung", „Die Logik des kollektiven Handelns" oder „Die Logik der Dichtung". Über notorische Fehler in komplexen Handlungssituationen informiert der Bestseller „Die Logik des Misslingens", eine Vortragssammlung des Dalai Lama heißt „Logik der Liebe", und in sozialpsychologischen Untersuchungen zu den Ursachen menschlicher Gewalt wird oftmals von der „Logik des Bösen" gesprochen.[1] „Logik" meint hier vor allem so etwas wie ein System grundlegender Prinzipien und Regeln eines bestimmten Untersuchungsgegenstands.

Thema dieses Buches ist jedoch die *formale* Logik. Sie abstrahiert von allem Konkreten und Inhaltlichen und systematisiert allgemeine Gesetzte und Schlussregeln des rationalen Denkens und Argumentierens, die allen Bereichen menschlicher Forschung zugrunde liegen. Diese Gesetze und Schlussregeln sind in bestimmter Weise *notwendig* und unabdingbar. Bereits im antiken Griechenland, der Wiege der europäisch-westliche Tradition der Logik, findet sich die Vorstellung von der Logik als einem System notwendig gültiger Denkgesetze. So definiert Aristoteles zu Beginn der *Analytica Priora* seiner unter der Bezeichnung *Organon* zusammengefassten Schriften zur Logik einen gültigen Schluss (*syllogismos*) als eine Rede, in der, wenn man bestimmte Dinge als gegeben voraussetzt, etwas anderes mit Notwendigkeit aus diesen Voraussetzungen folgt.[2] Auch wenn die aristotelische Syllogistik die Entwicklung der abendländischen Logik entscheidend geprägt hat, so beschränkte sie sich jedoch nur

[1] Vgl. Popper [8]1984, Mancur [5]2004, Hamburger [4]1994, Dörner [13]2003, Dalai Lama 1998 sowie Haslam; Reicher 2008.

[2] Vgl. Aristoteles, *Organon III: Lehre vom Schluß oder erste Analytik*, 24b, erschienen in Bonitz et al. (Hrsg.) (1995).

auf bestimmte Formen des Schließens.[3] Erst mit Gottlob Freges 1879 erschienenen *Begriffsschrift* erhielt die Logik als eine an die Mathematik angelehnte „Formelsprache des reinen Denkens“ (vgl. Frege [5]1998) ihre moderne Gestalt als formal präzises und umfassendes System logischer Schlussregeln.[4]

Die moderne formale Logik versteht sich *nicht* als Teil der kognitiven Psychologie. Die Logikerin[5] führt weder empirische Studien zur Erforschung des menschlichen Denkens durch, noch untersucht sie dessen Entstehungs- und Entwicklungsgeschichte.[6] Die menschlichen Fähigkeiten des logischen Schließens sind begrenzt und fehleranfällig. Menschen haben ein schwankendes logisches Urteilsvermögen, begehen oftmals Fehlschlüsse und argumentieren irrational. Sie folgen nicht immer dem beweiskräftigsten Argument, und ihre argumentativen Fähigkeiten sind häufig z. B. durch Emotionen, durch Eitelkeiten oder Vorurteile beeinflusst. Die Logik will von diesen Schwankungen, Fehlschlüssen und Irrationalitäten des menschlichen Denkens absehen. Sie analysiert und systematisiert objektiv gültige Denkgesetzte, die keinen subjektiven kognitiven Defiziten unterworfen sind. Die moderne Logik ist auch nicht Teil der Rhetorik. Sie lehrt nicht, wie man durch geschickte Redekunst Menschen überzeugen kann. Vielmehr versteht sie sich als Lehre vom korrekten Argumentieren, wobei die Korrektheit des Argumentierens nicht von den rhetorischen Fähigkeiten der Argumentierenden abhängt, sondern von der logischen Gültigkeit der verwendeten Schlüsse.

Auch wenn die Logik keine empirisch-deskriptive Disziplin ist, so ist sie dennoch kein rein präskriptives Unterfangen, das bloß vorschreiben will, wie man zu denken hat. Die Logik ist auch kein rein abstraktes Formelspiel, das gänzlich unabhängig von unserem

[3] Eine gute Einführung in die aristotelische Logik bietet u. a. Kneale; Kneale [2]2008, Kap. II. Zu den Ursprüngen der formalen Logik und ihrer Geschichte siehe auch Malpass; Antonutti Marfori (Hrsg.) 2017.

[4] Für Martha und William Kneale gilt daher das Jahr 1879 als wichtigstes Datum in der Geschichte der Logik (vgl. Kneale; Kneale [2]2008: 511).

[5] Hier wie im Folgenden soll das Femininum alle Menschen einschließen.

[6] Zu Freges logischem Antipsychologismus vgl. bspw. das Vorwort zur *Begriffsschrift* in Frege [5]1998 sowie die Einleitung zu den *Grundlagen der Arithmetik* in Frege 1987.

intuitiven Verständnis für rationale Normen des Denkens entwickelt wurde. Ähnlich wie in der Mathematik baut auch die Logik auf grundlegenden Gesetzen oder Schlussregeln auf, die ein hohes Maß an intuitiver Plausibilität besitzen, und entwickelt hieraus ein umfassendes System beweisbarer Sätze und gültiger Schlussprinzipien.

Zentral für ein jedes Logiksystem ist der Begriff des *logischen Schließens*, der *logischen Folgerung* oder des *logischen Beweises*. Die Logik formuliert insbesondere Regeln, die angeben, wann ein Schluss *logisch gültig* ist bzw. wann ein *logischer Fehlschluss* vorliegt. Im Folgenden soll nun die logische Gültigkeit von Schlüssen näher expliziert werden.

I.1 Logische Gültigkeit von Argumenten

Die moderne formale Logik hat das Ziel, ein umfassendes System allgemeiner notwendiger Grundgesetze und Schlussprinzipien des Denkens und Argumentierens zu entwickeln. Um dieses Ziel zu erreichen, muss näher erläutert werden, worin diese Gesetzte und Prinzipien bestehen und was insbesondere einen logisch gültigen Schluss auszeichnet.

Untersuchungsgegenstand der Logik sind *Schlüsse* oder *Argumente*. Ein Argument oder Schluss besteht zum einen aus einer These, für die argumentiert werden soll. Das bloße Behaupten einer These ist aber natürlich noch kein Argument. Die These muss in einem Argument *begründet* werden. Eine These wird in *logischer* Hinsicht begründet, wenn sie sich als *Konklusion* aus einem logisch gültigen Schlussfolgerungsprozess aus bestimmten *Prämissen* (Annahmen, Voraussetzungen) ergibt. Prämissen und Konklusion eines Argumentes sind dabei jeweils *Aussagen*, d. h. Behauptungssätze, die Sachverhalte zum Ausdruck bringen. Die Logik untersucht somit bestimmte logische Begründungszusammenhänge zwischen Aussagen in einem Argument. Sie formuliert Bedingungen, unter denen aus den Prämissen (oder aus *der* Prämisse, falls es nur eine Prämisse gibt) eines Arguments die Konklusion mit logischer Gültigkeit folgt. Ein logisch gültiges Argument ist in der Logik durch einen *notwendigen Wahrheitstransfer* ausgezeichnet, d. h. die Konklusion eines Arguments *muss* wahr sein, *falls* die Prämissen wahr sind: Ein Argument ist somit genau dann *logisch gültig*, wenn aus der angenommenen Wahrheit der Prämisse(n) die Wahrheit der Konklusion zwangsläufig folgt. Die Logik – genau genommen die *deduktive* Logik[7] – ist also eine *notwendig wahrheitserhaltende* Logik. In einem logisch gültigen Schluss kann es niemals der Fall sein, dass die Prämissen alle wahr sind, die Konklusion jedoch falsch ist.

Doch wodurch ergibt sich diese Zwangsläufigkeit oder Notwendigkeit, mit der die (angenommene) Wahrheit der Prämissen auf die Konklusion übertragen wird? Betrachten wir hierzu drei Beispiele. Über dem waagerechten Strich stehen in den folgenden Argumenten die Prämissen, darunter die Konklusion:[8]

Beispiel I.1.1

Wenn Sokrates ein Mensch ist, dann ist Sokrates sterblich.
Sokrates ist ein Mensch.

Sokrates ist sterblich.

[7] In diesem Buch geht es nur um die deduktive Logik. Ein logisch gültiger Schluss ist in der deduktiven Logik stets wahrheitserhaltend. Im Unterschied dazu ist ein Schluss in der *induktiven* Logik dadurch ausgezeichnet, dass die Konklusion aus den Prämissen nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit folgt. Der Gehalt der Konklusion kann bei einem induktiven Schluss daher über den Gehalt der Prämissen hinausgehen. Typische induktive Schlüsse sind Generalisierungsschlüsse, die z. B. aus beobachteten Einzelfällen universelle Aussagen ableiten, oder Vorhersageschlüsse, in denen von vergangenen und gegenwärtigen Beobachtungen auf zukünftige Fälle gefolgert wird – zur Einführung in die induktive Logik siehe z. B. Carnap 1959 und Essler 1970.

[8] Da wir in den folgenden Beispielen konkrete Sätze, wie „Wenn Sokrates ein Mensch ist, dann ist Sokrates sterblich", „Sokrates ist ein Mensch", „Sokrates ist sterblich" etc., *erwähnen*, d. h. über diese Sätze sprechen, müssten diese Sätze eigentlich in Anführungszeichen gesetzt werden. Beispiel I.1.1 sagt z. B. aus, dass aus den Sätzen „Wenn Sokrates ein Mensch ist, dann ist Sokrates sterblich" und „Sokrates ist sterblich" der Satz „Sokrates ist sterblich" logisch folgt. Aus Gründen der besseren Lesbarkeit lassen wir die Anführungszeichen jedoch bei im Text abgesetzten Beispielen weg.

Beispiel I.1.2

Wenn Anna das Logik-Tutorium besucht hat, dann hat sie das Logik-Testat bestanden

Anna hat das Logik-Testat nicht bestanden.

Anna hat das Logik-Tutorium nicht besucht.

Beispiel I.1.3

Wenn Gott die Welt erschaffen hat, dann gibt es keine Übel in der Welt.

Es gibt aber Übel in der Welt.

Gott hat die Welt nicht erschaffen.

Alle drei Argumente sind logisch gültig. Wenn man davon ausgeht, dass die jeweiligen Prämissen wahr sind, dann muss auch die Konklusion wahr sein. Dieser zwangsläufige Wahrheitstransfer von den Prämissen auf die Konklusion hängt aber nicht von den Inhalten der Argumente ab, sondern allein von der jeweiligen logischen Struktur, die diesen Argumenten zugrunde liegt.

In Beispiel I.1.1 wird in der ersten Prämisse eine Wenn-Dann-Beziehung, eine sogenannte *Implikationsbeziehung*, zwischen zwei Aussagen behauptet. In der zweiten Prämisse wird nun ausgesagt, dass der Wenn-Teil dieser Beziehung, das sogenannte *Antezedens,* tatsächlich gilt. Hieraus ergibt sich nun, dass auch der Dann-Teil, das *Konsequens*, wahr sein muss. Schreibt man „p_1“ als Abkürzung für „Sokrates ist ein Mensch“ und „q_1“ als Abkürzung für „Sokrates ist sterblich“, so lässt sich das Argument von Beispiel I.1.1 folgendermaßen schematisieren:

Wenn p_1, dann q_1

p_1

---

q_1

Man kann sich schnell klarmachen, dass auch inhaltlich andere Argumente, die jedoch derselben logischen Struktur genügen, ebenfalls logisch gültig sind. Beispielsweise ist auch das folgende Argument logisch gültig:

Beispiel I.1.4
Wenn Bonn am Rhein liegt, dann liegt Bonn an einem Fluss.
Bonn liegt am Rhein.
___
Bonn liegt an einem Fluss.

Antezedens und Konsequens der Implikation müssen zudem nicht notwendigerweise elementare Sätze sein, die sich auf jeweils einen einfachen Sachverhalt beziehen. Auch das folgende Argument ist logisch gültig:

Beispiel I.1.5
Wenn Ida nicht zur Party kommt, dann freut sich Anna und Paul ist traurig.
Ida kommt nicht zur Party.
___
Anna freut sich und Paul ist traurig.

Alle Argumente, die von einer Implikation und dem Antezedens dieser Implikation auf das Konsequens der Implikation schließen, sind logisch gültig. Es spielt hierbei keine Rolle, welche Inhalte die Prämissen und die Konklusion zum Ausdruck bringen. Auch ist es irrelevant, ob das Antezedens bzw. Konsequens einen einfachen Sachverhalt beschreibt (wie „Sokrates ist ein Mensch") oder komplexer ist (wie „Ida kommt *nicht* zur Party" oder „Anna freut sich *und* Paul ist traurig."). Die logische Schlussform, die diesen Argumenten zugrunde liegt, nennt man auch *modus (ponendo) ponens*. Hier wie im Folgenden sind A und B Platzhalter für *beliebige* Sätze. Der Schluss des *modus ponens* lässt sich also folgendermaßen ausdrücken:

modus ponens
Wenn A, dann B
A
___
B

In Beispiel I.1.2 wird in der ersten Prämisse eine Implikation zwischen zwei Aussagen – „Anna hat das Logik-Tutorium besucht" und „Anna hat das Logik-Testat bestanden" – behauptet. Es wird ausgesagt, dass Anna das Testat bestanden hat, wenn sie das Logik-Tutorium besucht hat. Die zweite Prämisse besagt nun aber, dass das Konsequens dieser Implikation nicht der Fall ist. Daher kann auch das Antezedens nicht gelten. Stehe „p_2" für „Anna hat das Logik-Tutorium besucht“ und „q_2“ für „Anna hat das Logik-Testat bestanden“, so lässt sich Beispiel I.1.2 etwas formaler folgendermaßen wiedergeben:

Wenn p_2, dann q_2
Nicht q_2

Nicht p_2

Dass es in Beispiel I.1.2 inhaltlich um Anna, um ein Logik-Tutorium und das Bestehen bzw. Nichtbestehen eines Testats geht, spielt für die logische Gültigkeit des Arguments keine Rolle. Auch andere Argumente, die derselben logischen Struktur genügen, sind logisch gültig, wie z. B.:

Beispiel I.1.6
Wenn Peter in Bonn lebt, dann lebt er in Nordrhein-Westfalen.
Peter lebt nicht in Nordrhein-Westfalen.

Peter lebt nicht in Bonn.

Nehmen wir an, dass Peter in Frankfurt am Main lebt. Somit sind die beiden Prämissen des obigen Arguments wahr: Wenn er in Bonn leben würde, dann würde er auch in Nordrhein-Westfalen leben. Außerdem gilt, dass er nicht in Nordrhein-Westfalen (sondern in Hessen) lebt. Aus der Wahrheit dieser beiden Prämissen folgt nun zwangsläufig, dass Peter nicht in Bonn leben kann.

Auch in Beispiel I.1.3 wird das Konsequens einer in der ersten Prämisse gegebenen Implikation in der zweiten Prämisse verneint. Hieraus folgt nun, dass das Antezedens der Implikation nicht gelten kann: Stehe „p_3“ für die Aussage „Gott hat die Welt erschaffen“ und „q_3“ für „Es gibt Übel in der Welt“, dann lässt sich Beispiel I.1.3 also folgendermaßen formulieren:

Wenn p_3, dann nicht q_3
q_3

Nicht p_3

Auch Beispiel I.1.3 genügt somit derselben logischen Struktur wie Beispiel I.1.2: In der ersten Prämisse wird eine Implikation aufgestellt – in diesem Fall zwischen „p_3“ und der Negation von „q_3“. Es wird behauptet, dass wenn „p_3“ der Fall ist, „q_3“ nicht gelten kann.

Die Negation von „q_3“ wird dann in der zweiten Prämisse verneint, da behauptet wird, dass „q_3“ doch gilt. Somit kann „p_3“ unmöglich wahr sein.

Das Schlussschema, welches Beispiel I.1.2 und Beispiel I.1.3 zugrunde liegt, nennt man auch *modus (tollendo) tollens*. Wir wollen es noch einmal in allgemeiner Form festhalten:

modus tollens
Wenn *A*, dann *B*
Nicht *B*
―――――――
Nicht *A*

Es ist wichtig zu sehen, dass in Beispiel I.1.3 nicht „bewiesen“ wurde, dass es keinen Schöpfergott gibt. Die Wahrheit der Konklusion, dass Gott die Welt nicht erschaffen hat, folgt *unter der Voraussetzung* der Wahrheit der beiden Prämissen in Beispiel I.1.3. Der Schluss lässt sich allerdings formal-logisch nicht angreifen: Wer die beiden Prämissen für wahr hält, ist bereits aus logischen Gründen gezwungen, auch die Konklusion für wahr zu halten. Wer die Prämissen akzeptiert, nicht jedoch die Konklusion, begeht einen logischen Fehler und argumentiert irrational. Freilich könnte eine Verteidigerin der Existenz eines Schöpfergottes die Wahrheit einer oder beider Prämissen bezweifeln und somit das Argument *inhaltlich* angreifen. In diesem Sinne ist die Logik eben nur Teil der *Argumentationstheorie*. Während sich die Logik allein mit der formalen Gültigkeit von Argumenten befasst, geht es in der Argumentationstheorie u. a. auch um die Frage, ob die Prämissen inhaltlich zu akzeptieren sind.

Fassen wir den Begriff der logischen Gültigkeit durch folgende Definition noch einmal zusammen:

<u>Definition (logische Gültigkeit)</u>
Ein Argument ist *logisch gültig* genau dann, wenn aus der angenommenen Wahrheit der Prämisse(n) die Wahrheit der Konklusion aus logischen Gründen notwendigerweise folgt, d. h. wenn sich unter der Annahme der Wahrheit der Prämisse(n) allein aufgrund der logischen Struktur des Arguments die Wahrheit der Konklusion zwangsläufig ergibt.