

Elke Brendel

Logik-Skript 1

Wahrheit und
logisches Schließen

KlostermannRoteReihe

Bibliographische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Daten sind im Internet über <http://dnb.dnb.de> abrufbar.

© 2018 · Vittorio Klostermann GmbH · Frankfurt am Main
Alle Rechte vorbehalten, insbesondere die des Nachdrucks und der Übersetzung. Ohne Genehmigung des Verlages ist es nicht gestattet, dieses Werk oder Teile in einem photomechanischen oder sonstigen Reproduktionsverfahren oder unter Verwendung elektronischer Systeme zu verarbeiten, zu vervielfältigen und zu verbreiten.

Gedruckt auf EOS Werkdruck von Salzer,
alterungsbeständig  ISO 9706 und PEFC-zertifiziert.

Druck: betz Druck GmbH, Darmstadt

Bindung: Litges & Dopf GmbH, Heppenheim

Printed in Germany

ISSN 1865-7095

ISBN 978-3-465-04282-2

Inhalt

Vorwort	7
I. Was ist Logik?	9
I.1 Logische Gültigkeit von Argumenten	11
I.2 Logische Fehlschlüsse	20
I.3 Inhaltliche Schlüssigkeit von Argumenten	22
I.4 Übungen zu Kapitel I	25
II. Junktorenlogik und Wahrheitstafeln	27
II.1 Die formale Sprache der Junktorenlogik	27
II.2 Umgangssprache und Junktorenlogik	32
II.3 Bivalenz, Wahrheitsfunktionalität und Wahrheitstafeln	36
II.4 Negation, Konjunktion, Adjunktion, Kontravalenz	38
II.5 Implikation und Äquivalenz	40
II.6 Wasons Vier-Karten-Auswahlaufgabe	44
II.7 Im Haus der Ritterinnen und Schurkinnen	47
II.8 Tautologie, Kontradiktion und Indeterminiertheit	48
II.9 Logische Folgerung und logische Äquivalenz	51
II.10 Die „Paradoxien der materialen Implikation“	54
II.11 Übungen zu Kapitel II	57
III. Der junktorenlogische Kalkül des natürlichen Schließens	61
III.1 Grundregeln	64
III.2 Ableitbarkeit und Beweisbarkeit	72
III.3 Widerspruchsbeweise	76
III.4 Beweise durch Fallunterscheidung	83
III.5 Das <i>verum ex quodlibet</i> und das Explosionsprinzip	86
III.6 <i>Tertium non datur</i> und ausgeschlossener Widerspruch	89
III.7 Dualität, Kommutativität, Assoziativität, Distributivität	91
III.8 Monotonie der Ableitbarkeitsrelation	99
III.9 Beweisstrategien	100
III.10 Übungen zu Kapitel III	102

IV. Quantorenlogik und modelltheoretische Semantik.....	105
IV.1 Von der Junktorenlogik zur Quantorenlogik.....	105
IV.2 Die formale Sprache der Quantorenlogik.....	108
IV.3 Formeln und Sätze.....	112
IV.4 Umgangssprache und Quantorenlogik.....	113
IV.5 Universum und Interpretation.....	114
IV.6 Wahrheit und Falschheit.....	119
IV.7 Logische Wahrheit, Falschheit und Folgerung.....	124
IV.8 Übungen zu Kapitel IV.....	125
V. Der quantorenlogische Kalkül des natürlichen Schließens	127
V.1 Grundregeln.....	127
V.2 Ableitbarkeit und Beweisbarkeit.....	135
V.3 Zulässige quantorenlogische Regeln.....	139
V.4 Übungen zu Kapitel V.....	148
Anhang: Lösungen zu den Übungen.....	149
Lösungen zu den Übungen zu Kapitel I.....	149
Lösungen zu den Übungen zu Kapitel II.....	150
Lösungen zu den Übungen zu Kapitel III.....	153
Lösungen zu den Übungen zu Kapitel IV.....	156
Lösungen zu den Übungen zu Kapitel V.....	157
Literaturverzeichnis.....	161
Symbol- und Stichwortverzeichnis.....	165

Vorwort

Dieses Buch umfasst den Stoff eines einsemestrigen Einführungskurses in die klassische Logik. Es bietet einen formal präzisen, zugleich aber auch anwendungsorientierten Zugang zu den Grundlagen der Semantik und Syntax der klassischen Junktoren- und Quantorenlogik. Bereits zu meiner eigenen Studienzeit an der Universität Frankfurt am Main habe ich bei Wilhelm K. Essler das logische Schlussfolgern anhand eines *Kalküls des natürlichen Schließens* erlernt. Der Kalkül des natürlichen Schließens erscheint mir auch heute noch als sehr geeignetes formales Instrument zum korrekten Ableiten und zur logischen Rekonstruktion von Argumenten. Das vorliegende Lehr- und Studienbuch orientiert sich daher in seinem syntaktischen Teil an der Darstellung dieses Kalküls, wie er u. a. in Essler et al. ⁵2001 entwickelt wurde – mit einigen Modifikationen insbesondere bei der Quantorenlogik. Mein Dank gilt somit zuerst meinem akademischen Lehrer Wilhelm Essler, der mein Interesse für formale Methoden in der Philosophie weckte und ohne den dieses Buch wahrscheinlich nicht existieren würde.

Während meiner langjährigen Tätigkeit als Philosophieprofessorin habe ich zahlreiche Einführungskurse in die Logik gegeben. Es war mir stets ein Anliegen, den Studierenden die Logik als eine wichtige Methode des korrekten Denkens und integralen Bestandteil der Philosophie zu vermitteln – und nicht als bloß lästige Pflichtübung oder gar Schikane des Lehrplans. Um die Relevanz der Logik für zentrale Fragen der Sprachphilosophie, der Erkenntnis- und Wissenschaftsphilosophie zu begreifen, sind neben dem Erlernen eines Beweiskalküls auch grundlegende Kenntnisse der formalen Semantik vonnöten. Im vorliegenden Buch findet sich daher auch ein semantischer Zugang zur Logik, der die Begriffe der *Bedeutung* und *Wahrheit* formaler Sprachen in den Vordergrund rückt.

Ein weiteres Anliegen dieses Buches ist es, auf die Möglichkeiten, aber auch Grenzen der klassischen Logik aufmerksam zu machen. Die klassische Logik ist, wie im Buch erläutert wird, u. a. aufgrund ihres Bekenntnisses zur Zweiwertigkeit und zur wahrheitsfunktionalen Interpretation der Junktoren, für bestimmte Anwendungen des menschlichen Denkens und Argumentierens nicht gut gerüstet.

Wie diese Limitierungen in nicht-klassischen Logiken überwunden werden können, ist dann jedoch Gegenstand eines weiteren Lehrbuches.

Mein großer Dank gilt Gregor Damschen und Timo Weiß für das sorgfältige Korrekturlesen des Buchmanuskripts. Sollte das Buch dennoch Fehler enthalten, so habe ich diese selbstverständlich ganz alleine zu verantworten.

Bonn, im Mai 2017

Elke Brendel

I. Was ist Logik?

Die festeste Beweisführung ist offenbar die rein logische, welche, von der besonderen Beschaffenheit der Dinge absehend, sich allein auf die Gesetze gründet, auf denen alle Erkenntnis beruht. (Frege ⁵1998: IX)

Der Begriff der Logik hat schon seit einiger Zeit Hochkonjunktur. So tragen etwa bedeutende Bücher des 20. Jahrhunderts Titel wie „Logik der Forschung“, „Die Logik des kollektiven Handelns“ oder „Die Logik der Dichtung“. Über notorische Fehler in komplexen Handlungssituationen informiert der Bestseller „Die Logik des Misslingens“, eine Vortragsammlung des Dalai Lama heißt „Logik der Liebe“, und in sozialpsychologischen Untersuchungen zu den Ursachen menschlicher Gewalt wird oftmals von der „Logik des Bösen“ gesprochen.¹ „Logik“ meint hier vor allem so etwas wie ein System grundlegender Prinzipien und Regeln eines bestimmten Untersuchungsgegenstands.

Thema dieses Buches ist jedoch die *formale* Logik. Sie abstrahiert von allem Konkreten und Inhaltlichen und systematisiert allgemeine Gesetze und Schlussregeln des rationalen Denkens und Argumentierens, die allen Bereichen menschlicher Forschung zugrunde liegen. Diese Gesetze und Schlussregeln sind in bestimmter Weise *notwendig* und unabdingbar. Bereits im antiken Griechenland, der Wiege der europäisch-westliche Tradition der Logik, findet sich die Vorstellung von der Logik als einem System notwendig gültiger Denkgesetze. So definiert Aristoteles zu Beginn der *Analytica Priora* seiner unter der Bezeichnung *Organon* zusammengefassten Schriften zur Logik einen gültigen Schluss (*syllogismos*) als eine Rede, in der, wenn man bestimmte Dinge als gegeben voraussetzt, etwas anderes mit Notwendigkeit aus diesen Voraussetzungen folgt.² Auch wenn die aristotelische Syllogistik die Entwicklung der abendländischen Logik entscheidend geprägt hat, so beschränkte sie sich jedoch nur

¹ Vgl. Popper ⁸1984, Mancur ⁵2004, Hamburger ⁴1994, Dörner ¹³2003, Dalai Lama 1998 sowie Haslam; Reicher 2008.

² Vgl. Aristoteles, *Organon III: Lehre vom Schluß oder erste Analytik*, 24b, erschienen in Bonitz et al. (Hrsg.) (1995).

auf bestimmte Formen des Schließens.³ Erst mit Gottlob Freges 1879 erschienenen *Begriffsschrift* erhielt die Logik als eine an die Mathematik angelehnte „Formelsprache des reinen Denkens“ (vgl. Frege ⁵1998) ihre moderne Gestalt als formal präzises und umfassendes System logischer Schlussregeln.⁴

Die moderne formale Logik versteht sich *nicht* als Teil der kognitiven Psychologie. Die Logikerin⁵ führt weder empirische Studien zur Erforschung des menschlichen Denkens durch, noch untersucht sie dessen Entstehungs- und Entwicklungsgeschichte.⁶ Die menschlichen Fähigkeiten des logischen Schließens sind begrenzt und fehleranfällig. Menschen haben ein schwankendes logisches Urteilsvermögen, begehen oftmals Fehlschlüsse und argumentieren irrational. Sie folgen nicht immer dem beweiskräftigsten Argument, und ihre argumentativen Fähigkeiten sind häufig z. B. durch Emotionen, durch Eitelkeiten oder Vorurteile beeinflusst. Die Logik will von diesen Schwankungen, Fehlschlüssen und Irrationalitäten des menschlichen Denkens absehen. Sie analysiert und systematisiert objektiv gültige Denkgesetze, die keinen subjektiven kognitiven Defiziten unterworfen sind. Die moderne Logik ist auch nicht Teil der Rhetorik. Sie lehrt nicht, wie man durch geschickte Redekunst Menschen überzeugen kann. Vielmehr versteht sie sich als Lehre vom korrekten Argumentieren, wobei die Korrektheit des Argumentierens nicht von den rhetorischen Fähigkeiten der Argumentierenden abhängt, sondern von der logischen Gültigkeit der verwandten Schlüsse.

Auch wenn die Logik keine empirisch-deskriptive Disziplin ist, so ist sie dennoch kein rein präskriptives Unterfangen, das bloß vorschreiben will, wie man zu denken hat. Die Logik ist auch kein rein abstraktes Formelspiel, das gänzlich unabhängig von unserem

³ Eine gute Einführung in die aristotelische Logik bietet u. a. Kneale; Kneale ²2008, Kap. II.

⁴ Für Martha und William Kneale gilt daher das Jahr 1879 als wichtigstes Datum in der Geschichte der Logik (vgl. Kneale; Kneale ²2008: 511).

⁵ Hier wie im Folgenden soll das Femininum alle Menschen einschließen.

⁶ Zu Freges logischem Antipsychologismus vgl. bspw. das Vorwort der *Begriffsschrift*, erschienen in Frege; Angelcelli ⁵1998 (Vorwort) sowie die Einleitung der Grundlagen der Arithmetik, erschienen in Frege; Schulte 1987.

bewiesen, dass 12 eine Primzahl ist, wenn wir von ziemlich absurden Annahmen ausgehen.

Ein Schluss kann *logisch ungültig* sein, wenn sowohl seine Prämisse(n) als auch die (vermeintliche) Konklusion *de facto* wahr sind, wie das folgende Beispiel I.1.12 zeigt:

Beispiel I.1.12

Wenn Sokrates ein Mensch ist, dann ist Sokrates sterblich.

Sokrates ist sterblich.

Sokrates ist ein Mensch.

Dieser Schluss ist logisch *ungültig*. Auch wenn die Prämissen und Konklusion tatsächlich wahr sind, so liefert die Wahrheit der Prämissen keine logische Begründung für die Wahrheit der Konklusion.

I.2 Logische Fehlschlüsse

Logische Fehlschlüsse sind dadurch ausgezeichnet, dass aus der angenommenen Wahrheit der Prämisse(n) die Wahrheit der Konklusion nicht logisch zwingend folgt. So ist etwa das obige Beispiel I.1.12 ein logischer Fehlschluss. Um den Fehlschluss zu erkennen, abstrahieren wir wieder von den konkreten Inhalten der Aussagen und betrachten nur die logische Struktur dieses Beispiels:

Wenn A , dann B

B

A

Dass ein solches Schlusschema nicht zwangsläufig von wahren Prämissen zu einer wahren Konklusion führt, zeigt sich schnell, wenn man für A und B solche Aussagen einsetzt, die zur Folge haben, dass die Prämissen zwar wahr, die Konklusion jedoch falsch ist, wie z. B. in:

Beispiel I.2.1

Wenn Angela Merkel 20 Jahre alt ist, dann ist sie volljährig.

Angela Merkel ist volljährig.

Angela Merkel ist 20 Jahre alt.

Dieses Beispiel genügt der logischen Struktur von Beispiel I.1.12. Hier folgt jedoch aus der Wahrheit der Prämissen nicht die Wahrheit der Konklusion. Die Prämissen sind zwar beide wahr: Wenn Merkel 20 Jahre alt wäre, dann wäre sie volljährig. Zudem ist Angela Merkel volljährig. Jedoch ist die Konklusion falsch, denn Angela Merkel ist älter als 20 Jahre. Dieser Fehlschluss wird manchmal *Bejahung des Nachsatzes* genannt (engl. *affirming the consequent*). Hier wird in logisch ungültiger Weise von der Behauptung des Konsequens (des Nachsatzes) einer Wenn-Dann-Behauptung auf das Antezedens geschlossen.

Um zu zeigen, dass ein Argument einen logischen Fehlschluss zum Ausdruck bringt, formuliert man also ein logisch strukturgleiches Beispiel mit eindeutig wahren Prämissen, aber einer eindeutig falschen Konklusion. Die dem Argument zugrunde liegende logische Struktur ist dann nicht notwendigerweise wahrheitserhaltend – und das Argument folglich logisch ungültig.

Betrachten wir noch einen weiteren logischen Fehlschluss:

Beispiel I.2.2

Wenn Fido eine Katze ist, dann kann Fido miauen.

Fido ist keine Katze.

Fido kann nicht miauen.

Nehmen wir an, dass Fido ein Hund ist, der, wie die meisten Hunde, nicht in der Lage ist zu miauen. Dann sind zwar Prämissen und Konklusion wahr, dennoch haben wir es hier mit einem Fehlschluss zu tun. Betrachten wir zunächst die dem Beispiel I.2.2 zugrundeliegende logische Struktur:

Wenn A , dann B

Nicht A

Nicht B

Dass dieses Schlusschema nicht notwendigerweise wahrheitserhaltend ist, zeigt das folgende Beispiel:

Beispiel I.2.3

Wenn Anna im Meer schwimmt, dann ist sie nass.

Anna schwimmt nicht im Meer (sondern liegt in der Badewanne).

Anna ist nicht nass.

Dieser logisch ungültige Schluss wird auch als Fehlschluss der *Verneinung des Antezedens* bezeichnet.

Auch das folgende Beispiel I.2.4 ist logisch ungültig:

Beispiel I.2.4

Berta trinkt zum Essen nicht sowohl Bier als auch Wein.

Berta trinkt kein Bier zum Essen.

Berta trinkt Wein zum Essen.

Nicht(A und B)

Nicht A

B

Man beachte, dass dieses Beispiel eine andere logische Struktur aufweist als das Beispiel I.1.8. Während Beispiel I.1.8 auf dem logisch gültigen Schluss des *konjunktiven Syllogismus* beruht, haben wir es in Beispiel I.2.4 mit einem logisch ungültigen Schluss zu tun. Aus der angenommenen Wahrheit der Prämissen folgt nicht zwangsläufig die Wahrheit der Konklusion: Nehmen wir an, dass die Prämissen wahr sind, d. h. dass Berta zum Essen niemals Bier und Wein gleichzeitig trinkt und dass sie kein Bier zum Essen trinkt. Hieraus folgt nicht mit Notwendigkeit, dass sie dann Wein zum Essen trinkt. Es könnte ja schließlich sein, dass sie *weder Bier noch Wein* zum Essen trinkt, sondern z. B. nur Wasser oder Wodka – oder gar nichts. Hier noch ein weiteres Argument, das deutlich die logische Ungültigkeit von Schlüssen der Form des Beispiels I.2.4 zeigt:

Beispiel I.2.5

Die Ampel zeigt nicht zugleich sowohl rot als auch grün an.

Die Ampel zeigt nicht rot (sondern gelb) an.

Die Ampel zeigt grün an.

I.3 Inhaltliche Schlüssigkeit von Argumenten

Nachdem wir logisch gültige Schlüsse von logischen Fehlschlüssen unterschieden haben, wollen wir uns nun Schlüssen zuwenden, die zwar logisch gültig, jedoch inhaltlich nicht akzeptabel sind. Mit Beispiel I.1.11 haben wir bereits einen derartigen Schluss kennengelernt. In diesem Beispiel wurde zwar logisch gültig (mit *modus ponens*)

auf die falsche Konklusion, dass 12 eine Primzahl ist, geschlossen, allerdings wurde hierbei u. a. von der falschen Prämisse ausgegangen, dass der Mond aus grünem Käse ist.

Die folgenden beiden Beispiele sind in ähnlicher Weise inhaltlich zu kritisieren¹⁰:

Beispiel I.3.1

Wenn die Pflanzenproduktion deutlich mehr Treibhausgase als die Massentierhaltung emittiert, dann trägt eine vegane Ernährung mehr zur globalen Erwärmung bei als der Fleischkonsum. Da die Pflanzenproduktion mehr Treibhausgase als die Massentierhaltung emittiert, trägt eine vegane Ernährung somit mehr zur globalen Erwärmung bei als der Fleischkonsum.

Beispiel I.3.2

Entweder gibt es ein Leben nach dem Tod, oder das irdische Leben ist sinnlos. Das irdische Leben ist aber nicht sinnlos. Somit gibt es ein Leben nach dem Tod.

Beispiel I.3.1 ist logisch gesehen einwandfrei. Es beruht auf dem logisch gültigen Schluss des *modus ponens*. Dennoch ist das Argument natürlich nicht überzeugend. Es ist *inhaltlich nicht schlüssig*, da es von einer falschen Prämisse ausgeht. Es ist gerade die Massentierhaltung, die deutlich mehr Treibhausgase als die Pflanzenproduktion emittiert (u. a. durch den Ausstoß von Methan bei der Rinderhaltung oder durch die Folgen der Futtermittelproduktion). Daher ist eine vegane Ernährungsweise allein schon aus ökologischen Gründen vorteilhafter.

Auch *Beispiel I.3.2* genügt einem logisch gültigen Schlusschema. Es beruht auf dem *adjunktiven Syllogismus*, der ja auch für das ausschließende „entweder oder“ Gültigkeit besitzt: Wenn es nur zwei (sich gegenseitig ausschließende) Alternativen gibt, und eine der Alternativen ist falsch, dann muss die andere Alternative wahr sein. In logischer Hinsicht lässt sich das Argument also nicht kritisieren. Aber sind auch seine Prämissen inhaltlich akzeptabel? Bereits die

¹⁰ Ich verzichte hier auf die schematische Darstellung mit waagrechttem Strich zur Trennung von Prämissen und Konklusion. Die Prämissen und die Konklusion der Argumente sind auch so klar erkennbar.

erste Prämisse, wonach es nur die beiden Alternativen gibt, ein Leben nach dem Tod oder die Sinnlosigkeit des Lebens, scheint doch wenig überzeugend zu sein. Es ist zumindest denkbar, dass dem menschlichen Leben auch ohne ewige Jenseitsvorstellung Sinn abgerungen werden kann.

Wir können also zwischen *logischer Gültigkeit* und *inhaltlicher Schlüssigkeit* von Argumenten unterscheiden und inhaltlich schlüssige Argumente folgendermaßen definieren¹¹:

Definition (inhaltliche Schlüssigkeit)

Ein Argument ist *inhaltlich schlüssig* genau dann, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

1. Das Argument ist logisch gültig.
2. Alle Prämissen des Arguments sind wahr.

Jedes inhaltlich schlüssige Argument ist also auch logisch gültig. Aber nicht jedes logisch gültige Argument ist auch inhaltlich schlüssig, wie die Beispiele I.1.11, I.3.1 und I.3.2 gezeigt haben. Ist ein Argument logisch ungültig, kann es jedoch nicht inhaltlich schlüssig sein – selbst dann, wenn alle seine Prämissen wahr sind. Damit ein Argument inhaltlich schlüssig ist, müssen *beide* Bedingungen der inhaltlichen Schlüssigkeit – logische Gültigkeit und Wahrheit aller Prämissen – gleichermaßen erfüllt sein. Daher ist das obige Beispiel I.1.12 ein logisch ungültiges und damit auch inhaltlich nicht schlüssiges Argument.

Mit rein logischen Überlegungen können wir die inhaltliche Schlüssigkeit eines Arguments meist nicht allein begründen, da hierzu oftmals z. B. auch empirisches Wissen vonnöten ist. Dass der Mond nicht aus grünem Käse ist, dass die Massentierhaltung deutlich mehr Treibhausgase als die Pflanzenproduktion emittiert oder dass das Leben einen Sinn haben kann, auch wenn es mit dem Tod unwiederbringlich enden sollte, leuchtet nicht bereits aus der bloßen Form des jeweiligen Satzes ein. Da dies ein Lehrbuch zur

¹¹ Im Englischen ist der Unterschied zwischen *valid* und *sound* zur Bezeichnung von logisch gültigen vs. inhaltlich schlüssigen Argumenten sehr viel verbreiteter als in deutschen Texten zur Logik. Für „sound“ gibt es in den Texten zur Logik keine einheitliche deutsche Übersetzung – vgl. z. B. Niko Strobach, der „sound“ mit „beweiskräftig“ übersetzt (Strobach ³2013, 17 f.).

formalen Logik ist, welche die *logisch gültigen* Schlüsse systematisiert, soll es im Folgenden nur um die logische Gültigkeit von Argumenten gehen.

I.4 Übungen zu Kapitel I

Übung I.1

Was trifft auf einen logisch gültigen Schluss zu?

Ein Schluss ist *logisch gültig*, wenn

- die Prämisse(n) wahr ist (sind).
- die Konklusion wahr ist.
- die Prämisse(n) und die Konklusion beide wahr sind.
- die Konklusion aus logischen Gründen wahr sein muss, falls die Prämisse(n) wahr ist (sind).

Übung I.2

Was trifft auf einen logischen Fehlschluss/logisch ungültigen Schluss zu?

Ein Schluss ist *ein logischer Fehlschluss*/ *logisch ungültig*, wenn

- die Prämisse(n) falsch ist (sind).
- die Konklusion falsch ist.
- die Prämisse(n) und die Konklusion beide falsch sind.
- die Konklusion falsch ist, obwohl die Prämisse(n) wahr ist (sind).

Übung I.3

Untersuchen Sie die logische Gültigkeit der folgenden Argumente, indem Sie die jeweiligen logischen Strukturen, die den Argumenten zugrunde liegen, aufzeigen. Verwenden Sie hierbei die Satzvariablen A und B . Nennen Sie die Namen der logisch gültigen Schlüsse, und erläutern Sie bei den Fehlschlüssen anhand eines Beispiels, warum diese ungültig sind!

- Wenn es regnet, ist die Straße nass. Es regnet. Also ist die Straße nass.
- Wenn es regnet, ist die Straße nass. Es regnet nicht. Also ist die Straße auch nicht nass.
- Wenn es regnet, ist die Straße nass. Die Straße ist nicht nass. Also regnet es nicht.